УДК 517.9

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В КОКАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ НАД СФЕРОЙ

А.А.З а й ц е в

(Калининградский государственный университет)

Анализируются новые интегрируемые гамильтоновы системы в кокасательном расслоении T^*S^n над n-мерной сферой S^n, которые обобщают известную систему К.Неймана [1], [2]. Найдены представления для потенциалов взаимодействия и первых интегралов анализируемых систем. Получены уравнения траекторий в квадратурах, которые в случае полиномиальных потенциалов есть гиперэллиптические интегралы.

I. Используя метод Якоби решения задачи о геодезических на эллипсоиде [3], Нейман решил [1] задачу о движении точки на сфере S^2 под действием квадратичного потенциала. Обобщение на случай S^n рассмотрел Мозер [2]. Вероятно, это единственный известный до сих пор нетривиальный пример интегрируемого гамильтонова потока в T^*S^n (тривиальным примером является геодезический поток). Система Неймана-Мозера нашла применения в геометрии [4] и в физике (теории солитонов, магнетиков и др.). Ввиду этого можно надеяться на полезность непосредственного обобщения проблемы Неймана, которое здесь рассматривается.

2. Пусть точка массы I движется на S^n под действием потенциала $u(x)$, $x=(x_1,\dots,x_{n+1})\in R^{n+1}$, тогда ее уравнения движения есть

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} u(x) + \nu(t)x\,, \qquad (\mathrm{I})$$

где $\nu(t)$ - множитель Лагранжа. Введем эллиптические координаты на сфере $\{\xi_\alpha\}$, определяя их как корни уравнения (относительно λ):

$$Q_\lambda(x) \equiv \sum_k \frac{x_k^2}{a_k-\lambda} = 0\,, \qquad 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$$

(здесь и далее индексы принимают следующие значения: $\alpha,\beta=\overline{1,n}$, $i,k=\overline{1,n+1}$). Это есть эртогональная система координат, в которой обычная евклидова метрика имеет вид $ds^2=\sum_\alpha g_\alpha\, d\xi_\alpha^2$, где

$$g_\alpha = \frac{-\prod_{\beta\neq\alpha}(\xi_\alpha-\xi_\beta)}{4\mathcal{D}(\xi_\alpha)}\,, \qquad \mathcal{D}(\xi_\alpha) \equiv \prod_i (\xi_\alpha - a_i).$$

Для кинетической энергии и импульсов имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha g_\alpha \dot{\xi}_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\eta_\alpha^2}{g_\alpha}\,, \qquad \eta_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = g_\alpha \dot{\xi}_\alpha .$$

Преобразуя уравнения движения (I) к гамильтонову потоку g_h^t в T^*S^n, получаем канонические уравнения

$$\dot{\xi}_\alpha = \frac{\partial h}{\partial \eta_\alpha}\,, \quad \dot{\eta}_\alpha = -\frac{\partial h}{\partial \xi_\alpha}\,, \quad h = \sum_\alpha \frac{\eta_\alpha^2}{2g_\alpha} + u(\xi)\,, \quad \xi = \{\xi_\alpha\}. \qquad (2)$$

Нас будут интересовать системы вида (2) с полным набором первых интегралов, квадратичных по импульсам.

Т е о р е м а I. Функции

$$\mathcal{F}_k(\xi,\eta) = \sum_\alpha \frac{1}{g_\alpha}(A_{k\alpha}(\xi)\eta_\alpha^2) + 2u_k(\xi) \qquad (3)$$

будут первыми интегралами системы (2) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial g_\beta}{\partial \xi_\alpha}(A_{k\alpha} - A_{k\beta}) + g_\beta \frac{\partial A_{k\beta}}{\partial \xi_\alpha} = 0\,, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \xi_\alpha} - A_{k\alpha}\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} = 0. \qquad (5)$$

Для доказательства нужно приравнять нулю стандартную скобку Пуассона функций h и $\mathcal{F}_k$, тогда левые части соотношений (4) и (5) окажутся коэффициентами кубических и линейных по импульсам слагаемых, соответственно, поэтому они должны обращаться в нуль, т.к. других слагаемых нет.

Система (4) независима от (5) и допускает много решений. Ограничимся теми, которые подсказывают результаты работ [5], [6], где изучена сходная ситуация.

П р е д л о ж е н и е I. Функции

$$A_{k\alpha} = \frac{x_k^2}{a_k - \xi_\alpha} \qquad (6)$$

являются решениями системы (4).

Формулы (6) определяют импульсные составляющие первых интегралов (3), осталось найти потенциалы u_k и u. После подстановки (6) в (5) для этих потенциалов получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial u_k}{\partial \xi_\alpha} - \frac{x_k^2}{a_k - \xi_\alpha}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} = 0. \qquad (7)$$

Т е о р е м а 2. Общее решение системы (7) дается формулами (несущественные постоянные слагаемые отбрасываются):

$$u = c\sum_i a_i x_i^2 + \sum_\alpha \frac{v_\alpha(\xi_\alpha)}{g_\alpha}\,, \qquad (8)$$

$$u_k = x_k^2\Big(c + \sum_\alpha \frac{v_\alpha(\xi_\alpha)}{g_\alpha(a_k-\xi_\alpha)}\Big)\,, \qquad (9)$$

где $v_\alpha(\xi_\alpha)$ – любые дифференцируемые функции, c – произвольная константа.

Для доказательства определим производящую функцию потенциалов u_k равенством $U(\lambda)=\sum\limits_k \frac{u_k}{a_k-\lambda}$. Из (7) следуют уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{(\lambda-\xi_\alpha)U(\lambda)}{Q_\lambda}-u\right)=0. \tag{I0}$$

Функция $U(\lambda)/Q_\lambda$ есть рациональная дробь (относительно λ), ограниченная при $\lambda\to\infty$ и имеющая простые полюсы в точках $\lambda=\xi_\beta$. Разлагая ее на простые дроби и подставляя разложение в уравнения (I0), приходим к представлениям (8), (9).

Следствием теоремы 2 будут следующие выражения для гамильтониана h и первых интегралов F_k:

$$h=c\sum_i a_i x_i^2+\sum_\alpha\frac{\eta_\alpha^2+2v_\alpha(\xi_\alpha)}{2g_\alpha},\quad F_k=x_k^2\Big(2c+\sum_\alpha\frac{\eta_\alpha^2+2v_\alpha(\xi_\alpha)}{g_\alpha(a_k-\xi_\alpha)}\Big). \tag{II}$$

П р е д л о ж е н и е 2. Первые интегралы F_k, имеющие представление (II), попарно коммутируют.

З а м е ч а н и е I. Система Неймана получается при $v_\alpha(\xi_\alpha)\equiv 0$; таким образом, она в некотором смысле есть вырождение рассматриваемых здесь систем.

Число первых интегралов F_k на единицу больше, чем требуется для интегрирования системы (2) по Лиувиллю [7]. В действительности, лишь n из них являются функционально независимыми в T^*S^n, т.к. справедливо

П р е д л о ж е н и е 3. Имеют место тождества

$$\sum_k F_k=2c,\ \sum_k a_k F_k=2h.$$

Т е о р е м а 3. Для производящей функции первых интегралов, определенной равенством $\Phi_\lambda(\xi,\eta)=\sum\limits_k F_k/(a_k-\lambda)$, справедливо представление

$$\Phi_\lambda(\xi,\eta)=Q_\lambda(\xi)\Big(2c+\sum\frac{\eta_\alpha^2+2v_\alpha(\xi_\alpha)}{g_\alpha(\lambda-\xi_\alpha)}\Big). \tag{I2}$$

Т е о р е м а 4. Функции $\Phi_\lambda(\xi,\eta)$ и $\Phi_\mu(\xi,\eta)$ коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

З а м е ч а н и е 2. В определении $\Phi_\lambda(\xi,\eta)$ мы следуем Мозеру [2], который точно также определил производящую функцию первых интегралов геодезического потока на эллипсоиде и доказал теоремы 3 и 4 для своего случая.

3. Для вывода уравнений траекторий точки на сфере S^n используем то, что $F_k=F_k^\circ=\text{const}$ вдоль траекторий. Полагаем $\varphi(\lambda)\equiv\sum\limits_k F_k^\circ/(a_k-\lambda)$. Из представления (I2) следует, что на траекториях гамильтоновой системы (2) выполняются соотношения

$$\sum_\alpha\frac{\eta_\alpha^2+2v_\alpha(\xi_\alpha)}{g_\alpha(\lambda-\xi_\alpha)}=\frac{\varphi(\lambda)}{Q_\lambda}-2c.$$

Функция в правой части есть правильная рациональная дробь с простыми полюсами. Разлагая ее на простые дроби, получаем после расщепления уравнения

$$\eta_\alpha^2+2v_\alpha(\xi_\alpha)+\frac{1}{4}\varphi(\xi_\alpha)=0,$$

откуда следуют дифференциальные уравнения траекторий

$$\dot\xi_\alpha=S_\alpha(\xi_\alpha)/g_\alpha,\quad S_\alpha(\xi_\alpha)\equiv\sqrt{\varphi(\xi_\alpha)-2v_\alpha(\xi_\alpha)}. \tag{I3}$$

Наконец, тождество $\sum\limits_\alpha \xi_\alpha^\beta/g_\alpha\mathcal{D}(\xi_\alpha)=-4\delta_{\beta n}$ позволяет преобразовать (переменные разделяются) уравнения (I3) к квадратурам

$$\sum_\alpha\frac{\xi_\alpha^\beta\,\dot\xi_\alpha}{\mathcal{D}(\xi_\alpha)S_\alpha(\xi_\alpha)}=-4\delta_{\beta n}\Rightarrow\sum_\alpha\int\frac{\xi_\alpha^\beta\,d\xi_\alpha}{\mathcal{D}(\xi_\alpha)S_\alpha(\xi_\alpha)}=-4(t-t_0)\delta_{\beta n}. \tag{I4}$$

В заключение заметим, что если основной потенциал u в декартовых координатах есть многочлен, то в представлениях (8), (9), (I3) функции v_α также являются многочленами, которые от α не зависят, тогда в левой части (I4) подынтегральные функции совпадают. Их знаменатели есть радикалы от одних и тех же многочленов (но зависящих от разных переменных), т.е. возникает задача Якоби обращения гиперэллиптических интегралов, решаемая в многомерных тэта-функциях [4].

Библиографический список

I. Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticorum classem revocatur // J. Reine Angew. Math. 1859. B.56. P. 46–63.

2. М о з е р Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. I98I. Т.36. Вып.5. С.I09–I5I.

3. Я к о б и К. Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, I936.

4. М а м ф о р д Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, I988. 448с.

5. З а й ц е в А.А. Теория конфокальных квадрик и интегрируемые гамильтоновы системы // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I993. Вып.24. С.57–64.

6. Zaitsev A.A. On one integrable systems family of interacting oscillators // Proceedings of the 8th International Workshop

Nonlinear Equations & Dynamical Systems. Needs'92 / ed V. Makhankov et al. Singapore: World Scientific, 1993. P.463-46

7. А р н о л ь д В.И. Математические методы классичес-кой механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

УДК 514.75

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НЕИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Г.И в а н о в, А.К.Л а п к о в с к и й

(Могилевский государственный педагогический институт)

Дано конструктивное правило получения кривизн и вектор сопровождающего репера неизотропной гладкой кривой гипербол ческого пространства ${}^mS_n$. Сделан предельный переход к псев доевклидову пространству.

I°. Гиперболическое n-пространство ${}^mS_n$ индекса m $(0\le m$ трактуем [1, с.210] в виде гиперсферы радиуса $r=\sqrt{\varepsilon_0}\,\rho$ $(\varepsilon_0=\pm 1;$ псевдоевклидова $(n+1)$-пространства ${}^lR_{n+1}$ индекса l ($l=m$ - при $\varepsilon_0=+1$, $l=n+1-m$ при $\varepsilon_0=-1$) с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Рассмотрим в пространстве ${}^mS_n$ гладкую неизотропную кр вую $\bar R=\bar R(s)$, отнесенную к натуральному параметру s:

$$\bar R^2=r^2=\varepsilon_0\rho^2, \quad \bar R'^2=\pm 1 \quad (\bar R^{(i)}\equiv d^i\bar R/ds^i;\ i\in\overline{1,n}).$$

Пусть $\Delta_{i-1}\equiv\Gamma(\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(i-1)})\ne 0$ - определители Грама, составленн из указанных векторов. Пусть также

$$\bar A_\alpha=\begin{vmatrix}\bar R^2 & \bar R\bar R' & \dots & \bar R\bar R^{(\alpha)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \bar R^{(\alpha-1)}\bar R & \bar R^{(\alpha-1)}\bar R' & \dots & \bar R^{(\alpha-1)}\bar R^{(\alpha)}\\ \bar R & \bar R' & \dots & \bar R^{(\alpha)}\end{vmatrix} \quad (\alpha\in\overline{1,n-1}). \qquad (1)$$

Векторные и косые произведения векторов обозначим соответственно через $[\cdot,\cdot,\dots,\cdot]$ и $\{\cdot,\cdot,\dots,\cdot\}$.

Запишем формулы Френе кривой $\bar R=\bar R(s)$:

$$\frac{\bar R'}{\rho}=\bar E_0'=k_0\bar E_1,\ \bar E_\alpha'=-\varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_\alpha k_{\alpha-1}\bar E_{\alpha-1}+k_\alpha\bar E_{\alpha+1},\ \bar E_n'=-\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n k_{n-1}\bar E_{n-1}. \qquad (2)$$

Здесь $(\bar R;\bar E_0,\bar E_i)$ - сопровождающий репер кривой; $\varepsilon_0,\ \varepsilon_i=\pm 1$ - ска

рные квадраты базисных векторов; k_{i-1} - кривизны кривой.

Т е о р е м а. Вычислительные формулы для векторов сопровождающего репера и кривизн кривой $\bar R=\bar R(s)$ пространства ${}^mS_n$ имеют вид:

$$\bar E_0=\frac{\bar R}{\rho},\quad \bar E_\alpha=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_{\alpha-1}\bar A_\alpha}{\sqrt{|\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha|}},\quad \bar E_n=\frac{[\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n-1)}]}{\sqrt{|\Delta_{n-1}|}}; \qquad (3)$$

$$\begin{cases} k_0=\dfrac{1}{\rho},\quad k_\beta=\dfrac{\sqrt{|\Delta_{\beta-1}\Delta_{\beta+1}|}}{|\Delta_\beta|} \quad (\beta\in\overline{1,n-2}),\\ k_{n-1}=(-1)^l\cdot\dfrac{\sqrt{|\Delta_{n-2}|}}{\Delta_{n-1}}\cdot\{\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n)}\}. \end{cases} \qquad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В общем случае будем считать, что векторы $\bar R$ и $\bar R^{(\alpha)}$ линейно независимы. Применяя к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим векторы $\bar R$ и $\bar A_\alpha$ (см.(1)). Поскольку при этом $\bar R^2=\Delta_0$, $\bar A_\alpha^2=\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha$, то в качестве векторов сопровождающего репера можно взять векторы:

$$\begin{cases} \bar E_0=\dfrac{\bar R}{\rho},\quad \bar E_\alpha=\dfrac{\lambda_\alpha\bar A_\alpha}{\sqrt{|\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha|}},\quad \bar E_n=[\bar E_0,\bar E_1,\dots,\bar E_{n-1}]=\\ =\operatorname{sign}(\Delta_0\Delta_1\dots\Delta_{n-2})\cdot\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n-1}\cdot\dfrac{[\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n-1)}]}{\sqrt{|\Delta_{n-1}|}}, \end{cases} \qquad (5)$$

где $\lambda_\alpha=\pm 1$ - неизвестные пока множители. Из формул Френе (2), равенств(5) и того, что

$$\bar E_0^2=\operatorname{sign}(\Delta_0),\ \bar E_\alpha^2=\operatorname{sign}(\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha),\ \bar E_n^2=(-1)^l\operatorname{sign}(\Delta_{n-1}),$$

следует:

$$k_0=\frac{\varepsilon_0\lambda_1}{\rho},\quad k_\beta=\varepsilon_\beta\lambda_\beta\lambda_{\beta+1}\cdot\frac{\sqrt{|\Delta_{\beta-1}\Delta_{\beta+1}|}}{|\Delta_\beta|},$$

$$k_{n-1}=(-1)^l\operatorname{sign}(\Delta_0\Delta_1\dots\Delta_{n-2})\cdot\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n-2}\cdot\frac{\Delta_{n-2}}{\sqrt{\Delta_{n-2}}}\cdot\frac{\{\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n)}\}}{\Delta_{n-1}}.$$

Требуя положительность первых $n-1$ из этих кривизн, получим искомые условия: $\lambda_\alpha=\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_{\alpha-1}$, откуда и вытекают равенства (3) и (4).

2°. Осуществляя предельный переход $\rho\to\infty$, придем от гиперболического пространства ${}^mS_n$ к псевдоевклидову пространству ${}^mR_n$ [1, с.262]. В нем рассматривается кривая $\bar r=\bar r(s)$, также отнесенная к натуральному параметру ($\bar r'^2=\pm 1$; $\bar r^{(\alpha)}\equiv\dfrac{d^\alpha\bar r}{ds^\alpha}$). Положим:

$$d_\alpha=\Gamma(\bar r',\bar r'',\dots,\bar r^{(\alpha)})\ne 0,$$